**Teoria miary**
WPPT IIr. semestr letni 2011
LISTA 9 (POWTÓRKOWA)

30/11/11

**Zadanie 1**
Na przestrzeni mierzalnej $(X, \Sigma)$ dane są miary $\mu$ i $\nu$ takie, że $\mu(X) = \nu(X) < \infty$. Czy rodzina $\{A \in \Sigma : \mu(A) = \nu(A)\}$ musi być sigma-ciałem?

**Zadanie 2**
Na $X = [0, \infty)$ określamy funkcję zbioru $\xi(A) = \sup A$ (uwaga, supremum zbioru pustego wynosi 0).
a) Wykaż, że $\xi$ jest miarą zewnętrzną oraz
b) wskaż zbiory mierzalne względem $\xi$.

**Zadanie 3.**
Udowodnij, że jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ jest granicą ciągu funkcji prostych $f_n$, z których każda przyjmuje co najwyżej $K$ wartości (gdzie $K$ jest stałą), to $f$ też jest funkcją prostą. *Wsk. Jesḷi $A$ jest zbiorem nieskończonym na prostej i $K$ jest liczbą naturalną, to dla dostatecznie małego $\epsilon$ zbioru $A$ nie da się pokryć sumą $K$ odcinków o długości $2\epsilon$.*

**Zadanie 4**
a) Udowodnij jednoznaczność granicy prawie wszędzie, tzn. jeśli $f_n \to f$ p.w. oraz $f_n \to g$ p.w. to $f = g$ p.w.
b) Udowodnij jednoznaczność granicy wg. miary, tzn. jeśli $f_n \to f$ wg. miary oraz $f_n \to g$ wg. miary to $f = g$ p.w.

**Zadanie 5**
Dana jest funkcja mierzalna $f\colon [0,1] \to (0,\infty)$. Podać przykład ciągu funkcyjnego $f_n\colon [0,1] \to (0,\infty)$ zbieżnego według miary (Lebesgue'a) do $f$ i takiego, że

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) < f(x).$$

dla każdego $x \in [0,1]$

**Zadanie 6**
Wiemy, że na prostej $\mathbb{R}$ z miarą Lebesgue'a $\lambda$, dla każdego zbioru mierzalnego $A$ o mierze skończonej i dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje zbiór domknięty $F \subset A$ taki, że $\lambda(F) > \lambda(A) - \epsilon$.

Korzystając z tego wykaż, że dla dowolnego zbioru $A$ (nawet miary nieskończonej) i dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje zbiór domknięty $F \subset A$ taki, że $\lambda(A \setminus F) < \epsilon$.